記号論理学Ｉ（岡本賢吾）　2008年7月28日（月）　２限　時間９０分

注意　・　持ち込みは自由.

・　問題は，この用紙の表裏両面である.

・　回答の順序は自由．どの問題に対する回答なのか判るよう配慮すること.

I.　次の（1）—（4）の帰結関係について，その証明図を書け．なお、（3）だけは「$\vdash_{NK}$」とある通り，二重否定除去則を使う必要があるが、それ以外の問題は，必ずNJの範囲内でやる.
「Φ」「Ψ」「X」「Υ」は，いずれも任意の論理式を代理する.

（1）　$\Phi \to (\neg\Phi \vee \Psi) \vdash \Phi \to \neg(\Psi \to (\neg\Phi \vee \neg\Psi))$

Φと、$\Psi \to (\neg\Phi \vee \neg\Psi)$ とを一旦仮定し，矛盾を導く。∨除去則の場合分けに入った後も、仮定Φを使ってよいことに注意。最後に仮定Φを外す。

（2）　$(\Phi \to X) \to \neg\Upsilon,\ (\Psi \to X) \to \neg\neg\Upsilon \vdash \neg((\Phi \vee \Psi) \to X)$

$(\Phi \vee \Psi) \to X$を一旦仮定し、さらに、適当な２つの仮定を自分で置く。その上で、問題自身の仮定とうまく組み合わせて矛盾を導く。

（3）　$\forall x(\neg\Psi(x) \to \neg\Phi(x)) \vdash_{NK} \exists x(\neg\Phi(x) \vee \Psi(x))$

結論の否定と、$\neg\Psi(x)$ とを仮定し、そこに問題自身の仮定をうまく絡めて、矛盾を導く。二重否定除去則は２回使うことになる。

（4）　$\forall x((\exists y\Phi(x, y) \wedge \exists z\Phi(x:=z, y:=x)) \to \forall y\Phi(x, y))$
$\vdash \forall y(\exists x\Phi(x, y) \to \exists x\forall z(\Phi(x:=z, y:=x) \to \Phi(x, y:=x)))$

$\exists x\Phi(x, y)$ を仮定し，存在量化子除去のサブプルーフに入る。このとき、一旦$\Phi(x:=z, y:=x)$ を仮定し、これをうまく使うことを考える。変項の書き換えは一切必要ない。

II.　以下を読み，後の［問１］［問２］に答えよ.

いま，ペアノ算術PAのある式$\Phi(x)$ について，次の（1）－（3）が証明できたとする。

（1）　$\Phi(x:=0)$

（2）　$\Phi(x:=S0)$

（3）　$\forall x(\Phi(x) \to \Phi(x:=SSx))$

するとこのとき、次の（4）も証明できる。

（4）　$\forall x\forall y(x=SSy \to \Phi(x:=y) \wedge \Phi(x:=Sy))$

つまり、次の［%1］が成り立つ。

［%1］　$(1), (2), (3) \vdash_{PA} (4)$

実はここから、$(1), (2), (3) \vdash_{PA} \forall x\Phi(x)$ も成り立つのだが、それは後回しにして、まず、［%1］について考える。［%1］が成り立つのは、次の２つが成り立つからである。

［%2］　$(1), (2), (3) \vdash_{PA} \forall y(0=SSy \to \Phi(x:=y) \wedge \Phi(x:=Sy))$

［%3］　$(1), (2), (3) \vdash_{PA} \forall x(\forall y(x=SSy \to \Phi(x:=y) \wedge \Phi(x:=Sy))$
$\to \forall y(Sx=SSy \to \Phi(x:=y) \wedge \Phi(x:=Sy)))$

［%2］と［%3］からは、数学的帰納法により（4）が帰結するから、［%1］が成り立つことが判る。では、［%2］と［%3］はどう証明すればよいか。［%2］は簡単なので、［%3］だけを考えよう。［%3］を証明するには、次の二つを証明すればよい。

[&1]　(1), (2), (3), $\forall y\ (x=SSy \to \Phi(x:=y) \land \Phi(x:=Sy))$　$\vdash_{PA}$
$Sx=SS0 \to \Phi(x:=0) \land \Phi(x:=S0)$

[&2]　(1), (2), (3), $\forall y\ (x=SSy \to \Phi(x:=y) \land \Phi(x:=Sy))$　$\vdash_{PA}$
$(Sx=SSy \to \Phi(x:=y) \land \Phi(x:=Sy)) \to$
$(Sx=SSSy \to \Phi(x:=Sy) \land \Phi(x:=SSy))$

[問1]　**[&2] の証明図を書け（実際に使う仮定は、(3) と** $\forall y\ (x=SSy \to \Phi(x:=y) \land \Phi(x:=Sy))$ **だけであり、PA の公理も、Ax.2 だけで足りる)。**

[問2]　**次の [$] を証明せよ (NJ だけで足りる)。**

[$]　(1), (2), (3), (4), $\forall x\ (x=0 \lor x=S0 \lor \exists y\ (x=SSy))$
$\vdash_{PA}\ \forall x\ (\Phi(x) \to \Phi(x:=Sx))$

III.　以下を読み，後の [問い] に答えよ.

ZF 集合論においては、次の定理が成り立つ。

(0)　$\vdash_{ZF}\ \cup x = \cup\{\cup y \mid y \subseteq x\}$
：　x の和集合と、各 y ($\subseteq x$) の和集合たちの和とは、等しい。

この (0) は、もちろん次の二つの定理に分解できる。

(1)　$\vdash_{ZF}\ \cup x \subseteq \cup\{\cup y \mid y \subseteq x\}$

(2)　$\vdash_{ZF}\ \cup\{\cup y \mid y \subseteq x\} \subseteq \cup x$

この (1) (2) を、「∪」「⊆」を用いないで書き直せば、次の (1*) (2*) になる。

(1*)　$\vdash_{ZF}\ \forall z\ (\exists u\ (u \in x \land z \in u) \to$
$\exists u \exists y\ (u \in y \land z \in u \land \forall w\ (w \in y \to w \in x)))$

(2*)　$\vdash_{ZF}\ \forall z\ (\exists u \exists y\ (u \in y \land z \in u \land \forall w\ (w \in y \to w \in x)) \to$
$\exists u\ (u \in x \land z \in u))$

(2*) の証明は簡単なので、(1*) について考えよう。次の (3) も ZF 集合論の定理である。

(3)　$\vdash_{ZF}\ \forall u \exists y \forall v\ (v \in y \longleftrightarrow v = u)$
：　どの u についても、その単元集合 y が存在する。

この (3) を前提すれば、後は NJ の推論規則を用いるだけで、(1*) を導くことができる。つまり、次が成り立つ。

[#]　(3)　$\vdash_{NJ}$　(1*)

[問い]　**[#] の証明図を書け。**

IV.　自分で用意した興味ある論証（記号論理に関係あれば何でもよい）を書くか，または，記号論理の意義について考えることを述べよ.

[問題終わり]